Fonctions strictement monotones | Leçons : 204, 205, 206, 214

Thm : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien (de dim finie), $f : E \to E$.
f est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que
$$\forall (x,y) \in E^2, \ \langle f(x) - f(y), x-y \rangle \geq k \|x-y\|^2$$
Si f est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone alors c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

Preuve :

- Montrons que f est strictement monotone $\Leftrightarrow \forall x \in E, \forall h \in E, \langle df_x(h), h \rangle \geq k\|h\|^2$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est strictement monotone, alors $\forall x \in E, \forall h \in E, \forall t \in \mathbb{R}^*$
$\langle f(x+th) - f(x), th \rangle \geq kt^2 \|h\|^2$ ou encore $\left\langle \frac{f(x+th)-f(x)}{t}, h \right\rangle \geq k\|h\|^2$
On a bien le résultat en faisant tendre t vers 0

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\langle df_x(h), h \rangle \geq k\|h\|^2$, $\forall x, h \in E$.
Soient $x, h \in E$ et considérons $\varphi : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \langle f(x+th), h \rangle \end{cases}$

On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \langle df_{x+th}(h), h \rangle \geq k\|h\|^2$

Donc par ~~inégalité des accroissements finis on a~~ en intégrant entre 0 et 1
$$\varphi(1) - \varphi(0) \geq k\|h\|^2 \text{ d'où } \langle f(x+th) - f(x), h \rangle \geq k\|h\|^2$$
D'où pour $y = x+h$ on a $\langle f(y) - f(x), y-x \rangle \geq k\|y-x\|^2$
D'où f est strictement monotone.

- ~~Supposons f étant $\mathcal{C}^1$, pour montrer et s~~
- f étant $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, pour montrer que c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorph il suffit de vérifier les hypothèses du théorème d'inversion ~~locale~~ global, c'est-à-dire :

1- ▶ $\forall x \in E$, df_x est inversible   2- ▶ f est une bijection de E sur E.

Pour le thm d'inversion global il suffit l'injectivité de f or on vt mq c'est un $\mathcal{C}^1$-difféo de E dans E il nous faut donc la surjectivité.

1- ▶ Soit $x \in E$. On a $\langle df_x(h), h \rangle \geq k \|h\|^2$ $\forall h \in E$ donc $df_x(h) \neq 0$, $\forall h \neq 0$

Ainsi df_x est injective et donc bijective car E est de dimension finie.
(et df_x est un endomorphisme)

Donc df_x est inversible (et est $\mathcal{C}^1$ car f est $\mathcal{C}^1$)

2- ▶ f est strictement monotone donc $\langle f(x)-f(y), x-y \rangle \geq k\|x-y\|^2 \geq 0$
donc f est injective. Montrons que f est surjective.

On veut montrer que $f(E) = E$, or E étant connexe, il suffit de montrer que $f(E)$ est un ouvert fermé de E.

- On a que $\forall x \in E$, df_x est inversible donc f est une application ouverte et E étant ouvert on a que $f(E)$ est ouvert.
- Pour montrer que $f(E)$ est fermé dans E on va montrer que $f(E)$ est complet
f étant strictement monotone, par inégalité de Schwarz on a

$$\begin{cases} |\langle f(x)-f(y), x-y \rangle| \leq \|f(x)-f(y)\| \cdot \|x-y\| \\ k\|x-y\|^2 \leq \langle f(x)-f(y), x-y \rangle \end{cases}$$

D'où $\|x-y\| \leq \frac{1}{k} \|f(x)-f(y)\|$

Soit une suite de Cauchy $(f(x_n))$ de $f(E)$.

On a $\|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{k} \|f(x_p) - f(x_q)\|$, $\forall p, q \in \mathbb{N}$ suffisamment grand donc (x_n) est une suite de Cauchy dans E donc converge (E est complet car c'est un $\mathbb{R}$-ev et $\mathbb{R}$ est complet)

Notons x sa limite.

On a alors $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$ par $\mathcal{C}^0$ de f. D'où $(f(x_n))$ converge vers $f(x) \in E$, donc $f(E)$ est complet

D'où $f(E)$ ~~est ouvert~~ fermé d'où $f(E)$ ouvert et fermé donc connexe

Donc ~~f est~~ $f(E) = E$ d'où f surjective d'où f bijective

Donc f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme par théorème d'inversion locale

Analyse, Gourdon. □

COMPLÉMENT

- <u>Lemme</u> : E, F Banach et $U \subset E$ ouvert. $f : U \to F$ $\mathcal{C}^1$ tq $\forall x \in U$ df_x inversible. Alors f est une application ouverte.

  <u>Preuve</u> : Soit Ω ouvert de U et $x \in \Omega$. Par théorème d'inversion locale $\exists V_x \subset \Omega$ vois ouvert de x et W_x vois ouvert de $f(x)$ tq $f : V_x \to W_x$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo.

  En particulier $f(V_x) = W_x$ d'où

  $$f(\Omega) = f\Big(\bigcup_{x \in \Omega} V_x\Big) = \bigcup_{x \in \Omega} f(V_x) = \bigcup_{x \in \Omega} W_x$$